



# मुक्त पाठ्य सामग्री 2016-17

## गणित

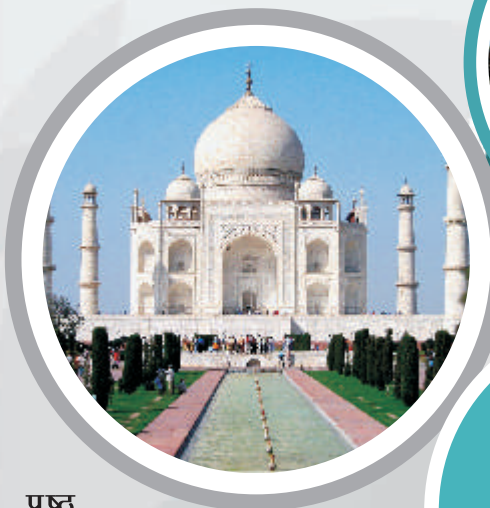
### विषय

1. खेतों की विलुप्त सीमाओं का मूलरूप निर्धारण
2. वास्तुकला में चतुर्भुज, वाह ताज!

### पृष्ठ

1  
9

कक्षा  
नौवीं



केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड

शिक्षा केन्द्र, 2, समुदाय भवन, प्रीत विहार,  
दिल्ली - 110092, भारत

# मुक्त पाठ – आधारित मूल्यांकन 2016 – 2017

## गणित (041) कक्षा – नौवी

### विषय 1 : खेतों की विलुप्त सीमाओं का मूलरूप निर्धारण

#### शिक्षण उद्देश्य

#### शिक्षार्थी सीख पायेंगे

- चतुर्भुजों का भुजा आधारित तथा कोण आधारित गुणों के आधार पर अन्तर समझना।
- चतुर्भुजों का विकर्ण के गुणों के आधार पर अन्तर समझना।
- विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों को गुणों के आधार पर तथा दी गई सूचना के आधार पर आकृति पहचानना।
- विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों के ज्ञान का प्रयोग करना तथा निम्न प्रमेयों को वास्तविक स्थितियों में प्रयोग करना。
  1. समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण समान्तर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
  2. समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं समान होती हैं तथा विलोम।
  3. समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं तथा विलोम।
  4. यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर समान तथा समान्तर होता है तो चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।
  5. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाग करते हैं तथा विलोम।
  6. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है एवम इसका आधा होता है तथा इसका विलोम।

#### पाठकों हेतु नोट

- पाठक कुछ अधिक प्रश्नों को बनाएं तथा चर्चा करें।

## मुक्त पाठ – आधारित मूल्यांकन 2016 – 2017

### गणित (041) कक्षा – नौवी

#### विषय 1 : खेतों की विलुप्त सीमाओं का मूलरूप निर्धारण

##### सारांश

आपने चतुर्भुजों की भुजाओं तथा विकर्णों पर दिए गए प्रतिबन्धों के आधार पर विभिन्न चतुर्भुजों के गुणों को पढ़ा तथा विभिन्न चतुर्भुजों को पहचानना सीखा। सामान्यता ऐसे विषय पुस्तकीय होने के कारण शुष्क लगते हैं क्योंकि इसके प्रयोगात्मक स्वरूप का ज्ञान नहीं मिल पाता। दिया गया अनुच्छेद ज्यामिति में सीखे गए ज्ञान का प्रयोगात्मक रूप दर्शाता है। एक गांव के किसानों द्वारा अपनी भाषा के दिए गए सूत्रों के आधार पर एक लड़की ने अपने ज्यामिति ज्ञान द्वारा किसानों के जमीन के झगड़ों को सुलझाती है। इस प्रकार के ज्ञान को जान कर आप को विषय में अधिक रुचि आएगी तथा अर्जित ज्ञान का प्रयोग कर के विषय को अधिक सीखने की इच्छा जागृत होगी।

ग्रीष्म अवकाश में रोशनी आसाम के अपने एक गांव गई। उसने अपना दादा जी से अपने खेत देखने की इच्छा प्रकट की। दादाजी ने बड़े दुख के साथ बताया कि खेतों में जाने का कोई लाभ नहीं क्योंकि बाढ़ ने सभी खेतों को नष्ट कर दिया है।

उसने बताया कि जमीन का मालिक अपने खेतों को किसानों को जोतने हेतु किराये पर देता है। परन्तु बाढ़ ने सभी खेतों की मुंडेरों को बराबर कर दिया है। इस कारण कोई भी किसान अपने खेत को पहचान नहीं सकता। सभी बड़े उदास हैं। रोशनी ने पूछा कि सभी किसान क्यों उदास हैं। इन सभी लोगों को अपने खेतों के माप का ज्ञान होगा। इन मापों के आधार पर सभी किसान अपने खेतों की सीमा निर्धारित कर कार्य आरम्भ कर सकते हैं। दादा जी ने कहा कि आप ठीक कह रही हो परन्तु कुछ अनपढ़ किसान अपने खेतों का माप नहीं बता सकते। इस प्रकार ऐसे किसान चतुर किसानों द्वारा ठगे जाते हैं। किसानों के प्रतिदिन इस बात पर झगड़े होते हैं। रोशनी ने समझा कि उसके दादा किसानों की भलाई हेतु बहुत अधिक चिन्तित हैं। उसके मन में किसानों की सहायता करने की इच्छा बनी। उसने अपने दादा से पूछा कि वह किसी एक जमीन मालिक की जमीन की आकृति बताएं। दादा ने उसको बताया कि अपने

पड़ोसी रामकृष्णा का खेत सबसे बड़ा था। जिसकी चार भुजाएं थी तथा चारों भुजाएं समान थीं। लड़की को यह भी ज्ञान हुआ कि रामकृष्णा ने अपनी जमीन 12 किसानों को किराए पर दी थी।

तब रोशनी ने कुछ गांव वालों से बात की तथा उसको पता चला कि सभी खेत चार भुजाओं वाले थे तथा एक तीन भुजाओं वाला था। उसने कुछ देर सोचा। सोचने के पश्चात उसके चेहरे पर चमक थी।

**रोशनी :** मुझे पता चला है कि एक को छोड़कर सभी खेतों की चार भुजाएं थी। इसका अर्थ है कि खेत चतुर्भुज तथा त्रिभुज हैं। मैंने चतुर्भुजों के गुणों का ज्ञान अपनी कक्षा में पढ़ा है। मेरा विचार है कि मैं सभी किसानों को उनके खेतों की सीमाओं को पुनः निर्धारण करने में सहायता कर सकती हूँ।

**दादा (हैरान होकर) :** कैसे?

**रोशनी :** मुझे किसानों से कुछ सूचना चाहिए। मुझे (सभी) एक रहस्यमयी मानव समझें जो कि इस गांव की समस्या को सुलझाने आया है। कृपया सभी किसानों की एक मीटिंग का प्रबन्ध करें। मैं उनसे कुछ प्रश्न करूँगी तथा एक मापक फीते का भी प्रबन्ध करें।

दादा ने सभी 12 किसानों को जिनके खेत बाढ़ में प्रभावित हुए थे, बुलाया। रोशनी ने सभी किसानों के नाम पूछे। किसानों से सूचना लेनी प्रारम्भ की। उसने सामान्य भाषा को गणितीय रूप दिया तथा निम्न तालिका बनाई।

**तालिका-1**

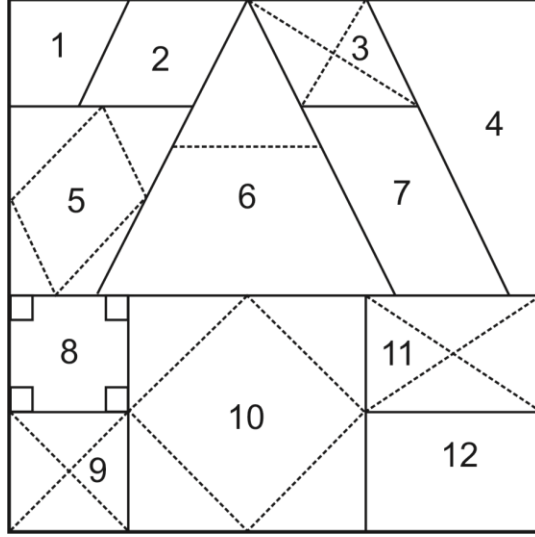
क्र.सं.	किसान का नाम	किसानों के कथनों का स्वरूप
1.	कृष्णा	मेरा कोने वाला खेत था। इस की एक भुजा इसकी सीमा के समान्तर थी।
2.	दोरजी	मेरा खेत कृष्णा से साथ वाला था तथा एक भुजा सीमा थी मेरे खेत की सभी भुजाएं समान थी।
3.	डोंडुप	मेरे खेत की एक भुजा सीमा के साथ थी परन्तु सम्मुख बिन्दुओं को मिलाने वाली रस्सी समान नहीं थी। सम्मुख बिन्दुओं को मिलाने वाली रस्सियां परस्पर काटने वाले स्थान पर एल (L) की आकृति बनाती थी।

4.	रहमान	दो भुजाएं सीमांत भुजाएं थीं। तीसरी भुजा डोंडुप तथा उत्तपा के खेत के संलग्न थी। चौथी भुजा सबसे छोटी भुजा थी
5.	जीवन	मैं अपने खेत में पांच प्रकार की पांच विभिन्न फसलें पैदा करने के लिए संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर खेत को पांच भागों में बांटता था।
6.	ओंकार	मेरा भी तीन भुजाओं वाला बड़ा खेत था। एक भुजा दोरजी तथा जीवन के खेतों के संलग्न थी तथा दूसरी भुजा डोंडुप तथा उत्तपा के खेतों के उभयनिष्ठ थी। मैं भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को रस्सी से मिलाकर खेत को 1 : 3 में बांटता था।
7.	उत्तपा	मेरे खेत की सम्मुख भुजाएं समान थीं। एक भुजा डोंडुप के खेत के उभयनिष्ठ थी।
8.	यूसुफ	मेरे खेत की सभी भुजाएं समान थी तथा इसका प्रत्येक कोण $90^{\circ}$ का था।
9.	नेकचन्द	मैं अपने खेत की सम्मुख बिन्दुओं को रस्सी से नापता था। दोनों रस्सियाँ समान थीं तथा परस्पर बराबर-बराबर काटती थी।
10.	लक्ष्मीनारायण	हम पांच भाई एक ही खेत में कार्य करते थे हमारे पास समान भुजाओं वाला बड़ा खेत था मैं भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर खेत को पांच भागों में बांटता था। खेतों की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रस्सी की लम्बाई समान थी।
11.	राम	मैं अपने खेत के सम्मुख बिन्दुओं को रस्सी से नापता था। दोनों ओर के सम्मुख भुजाओं की रस्सी की लम्बाई समान थी परन्तु सम्मुख बनी त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान थे।
12.	डेविड	मेरे खेत की सम्मुख भुजाएं समान थी। यह राम के खेत जैसा लगता था।

सभी सूचनाएं एकत्र करने के पश्चात उसने संभावित आकृतियों की एक तालिका बनाई। इसकी एक संभावित आकृति बनाई। इस प्रकार की आकृतियों को किसानों को दिखाया।

क्र.सं.	किसान का नाम	किसानों द्वारा बताई सूचना पर आधारित गणितीय आकृति
1.	कृष्णा	समलम्ब चतुर्भुज
2.	दोरजी	वर्ग अथवा सभभुज चतुर्भुज
3.	डोंडुप	समभुज चतुर्भुज अथवा पतंग चतुर्भुज
4.	रहमान	कोई चतुर्भुज
5.	जीवन	कोई चतुर्भुज
6.	ओंकार	त्रिभुज
7.	उत्तपा	समान्तर चतुर्भुज
8.	यूसुफ	वर्ग
9.	नेकचन्द	वर्ग अथवा आयत
10.	लक्ष्मीनारायण	वर्ग
11.	राम	आयत
12.	डेविड	आयत

रोशनी ने पाया कि खेतों की लम्बाई के लिए रस्सी रेखा खण्डों का प्रयोग दो बिन्दुओं की दूरी नापने, कोनों के बिन्दुओं को मिलाने पर दूरी नापना तथा खेतों को कई भागों में बांटते हुए रस्सी को सदैव सीधा रखा जाता है। किसानों द्वारा बताई आकृतियों को मानने के पश्चात उसने कुछ और सूचनाएं एकत्रित की तथा खेतों के निम्न विभाजन को अन्तिम रूप दिया।



### प्रतिदर्श / नमूना प्रश्न

1. ओंकार का कथन पढ़ें। त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखण्ड का त्रिभुज की तीसरी भुजा से सम्बन्ध ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की पुष्टि हेतु प्रमेय लिखें। बताइए कि क्यों दो क्षेत्रों के क्षेत्रफल का अनुपात 1 : 3 है। (3 अंक)

ओंकार	मेरा भी तीन भुजाओं वाला बड़ा खेत था। एक भुजा दोरजी तथा जीवन के खेतों के संलग्न थी तथा दूसरी भुजा डोंडुप तथा उत्तपा के खेतों के उभयनिष्ठ थी। मैं भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को रस्सी से मिलाकर खेत को 1 : 3 में बांटता था।
-------	--

2. डोंडुप का कथन सुना। रोशनी ने निष्कर्ष निकाला कि इसका खेत एक समभुज चतुर्भुज या पतंग की आकृति का हो सकता है? क्या आप रोशनी के निष्कर्ष से सहमत हैं? न्यायसंगत सिद्ध कीजिए। (4 अंक)

डोंडुप	मेरे खेत की एक भुजा सीमा के साथ थी परन्तु सम्मुख बिन्दुओं को मिलाने वाली रस्सी समान नहीं थी। सम्मुख बिन्दुओं को मिलाने वाली रस्सियां परस्पर काटने वाले स्थान पर एल (L) की आकृति बनाती थी।
--------	---

3. लक्ष्मीनारायण के कथन को सुनकर रोशनी ने परिणाम निकाला कि उसका खेत वर्ग की आकृति का है? क्या आप उसके विचार से सहमत हैं? न्यायसंगत सिद्ध कीजिए।

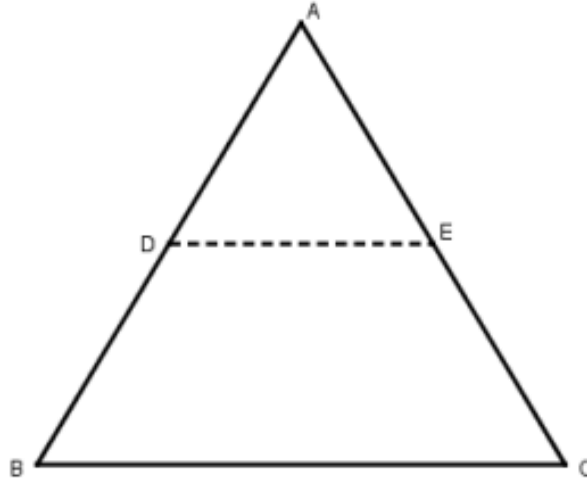
वर्ग के अन्य गुण बताइए।

वर्ग तथा आयत के विकर्णों के गुणों में अन्तर बताइए।

लक्ष्मीनारायण	हम पांच भाई एक ही खेत में कार्य करते थे हमारे पास समान भुजाओं वाला बड़ा खेत था मैं भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर खेत को पांच भागों में बांटता था। खेतों की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रस्सी की लम्बाई समान थी।
---------------	--

### अंक योजना

1.

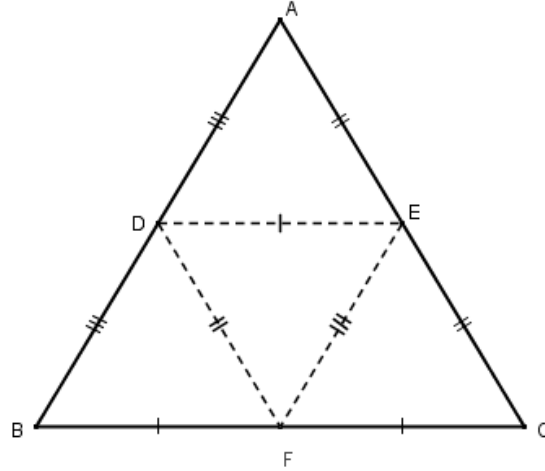


- (i) त्रिभुज की दो भुजाओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है तथा तीसरी भुजा की लम्बाई का आधा होता है।

### मध्य बिन्दु प्रमेय

- (ii) यदि हम तीसरी भुजा के मध्य बिन्दु को दो भुजाओं के मध्य बिन्दु से मिलाएं तो इस प्रकार बनी त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं। अतः त्रिभुज के दो भागों का क्षेत्रफल 1 : 3 में है।





2. (i) हाँ, किसान के खेत की चार भुजाएं हैं अर्थात् चतुर्भुज आकृति का है गणितीय रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है।
- यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाग करते हैं परन्तु लम्बाई में समान नहीं तो यह एक समभुज चतुर्भुज है अथवा पतंग है।
- (ii) सभी भुजाएं समान हैं तथा विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाग करते हैं।
- (iii) आयत
3. (i) हाँ, क्योंकि वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज एक वर्ग होता है। जिसकी भुजाएं एक समान है। इससे सिद्ध होता है कि खेत वर्ग की आकृति का है।
- (ii) सभी भुजाएं समान हैं। सभी कोण समान हैं। समान विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाग करते हैं।
- (iii) वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं पर समकोण नहीं बनाते।

## मुक्त पाठ – आधारित मूल्यांकन 2016 – 2017

### गणित (041) कक्षा – नौवीं

#### विषय 2 : वास्तुकला में चतुर्भुज, वाह ताज!

##### शिक्षण उद्देश्य

##### शिक्षार्थी सीख पायेंगे

- विभिन्न प्रकार की चतुर्भुजों, जो कि वास्तुकला रूपांकन में प्रयोग में लाई जाती है, को पहचानना।
- चतुर्भुज के विकर्ण के महत्व को समझना जो कि विहिंग (भवन) तथा रूपांकन में सममिति को मजबूती देता है।
- गोल्डन अनुपात तथा दो तरफा रूपांकन के नये अक्षरों को सीखना तथा इनको चतुर्भुज के प्रयोग में लाना।
- विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों को प्रयोग करना तथा निम्न प्रमेयों को वास्तविक परिस्थितियों के प्रयोग में लाना।
  1. समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण समान्तर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
  2. समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं समान होती हैं तथा विलोम।
  3. समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं तथा विलोम।
  4. यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर समान तथा समान्तर होता है तो चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।
  5. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाग करते हैं तथा विलोम।
  6. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है तथा इसका आधा होता है तथा इसका विलोम।

##### पाठकों हेतु नोट

इस प्रकार का अध्ययन विद्यार्थियों में ज्यामिति के प्रति रुचि उत्पन्न करता है तथा एनसीईआरटी की पुस्तक के प्रत्येक प्रश्न का प्रयोगात्मक रूप ध्यान में आता है। ताजमहल की ज्यामिति रचना में हर प्रकार के चतुर्भुज को देखा जा सकता है। इस प्रकार ताजमहल की सममिति को और अधिक अच्छे प्रकार से समझा जा सकता है। चतुर्भुज पर किए गए प्रश्नों पर विद्यार्थी अधिक ध्यान देकर इनके व्यावहारिक महत्व को जान पायेंगे।

## मुक्त पाठ – आधारित मूल्यांकन 2016 – 2017

### गणित (041) कक्षा – नौवीं

#### विषय 2 : वास्तुकला में चतुर्भुज, वाह ताज!

##### सारांश

वास्तुकला के विशेषज्ञों के कार्य में विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों तथा यूक्लिडियन ज्यामिति का एक विशेष स्थान है। चतुर्भुजों के गुणों के कारण वास्तुकला विशेषज्ञ किसी भी बिल्डिंग का रूपांकन कर आकाश का उचित प्रयोग करते हैं। नवीं कक्षा में चतुर्भुज के ज्ञान द्वारा ताजमहल जैसे प्रसिद्ध भवन की संरचना को अच्छी प्रकार जान सकेंगे तथा अधिक प्रशंसा करेंगे।

**नोट:** निम्न अनुच्छेद चतुर्भुज के ज्ञान का प्रयोगात्मक रूप दर्शाता है ताजमहल के अध्ययन को विशेष रूप से चुना गया क्यों कि यह सममिति का पूर्व रूप है। इस सममिति रचना को अच्छी प्रकार जानने हेतु इस संरचना को आयताकार विभागों में बांटा जाता है।

वास्तुकला रूपांकन में चतुर्भुज आकृति का स्थान सबसे अधिक काम आने वाले आकृतियों में दूसरे स्थान पर है। चार कोनों तथा चार किनारों से कई प्रकार के चतुर्भुज उदाहरण हेतु समलम्ब चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समभुज चतुर्भुज तथा पतंग इत्यादि प्राप्त होते हैं। यह सभी भुजाओं और कोणों में विभिन्न प्रकार के परिवर्तन से होता है। इस प्रकार चारभुजीय बहुभुज के चरीय गुणों के कारण वास्तुकला विशेषज्ञों को सुन्दर बिल्डिंग बनाने में सहायता मिलती है। बहुभुज के स्थान पर चतुर्भुज को प्राथमिकता दी जाती है। इससे आकाश का अधिकतम उपयोग हो पाता है। नीचे दी गई कुछ बिल्डिंगों की आकृतियों को देखें।





इन भवनों के निर्माण में आप समान्तर चतुर्भुजों, आयतों, वर्गों, समभुज चतुर्भुजों तथा समलम्ब चतुर्भुजों इत्यादि का अधिकतम प्रयोग देख सकते हो। अधिकतर भवनों के वास्तुकला को चतुर्भुज के प्रयोग से समझा जा सकता है। भवन की नींव से लेकर ऊंची छत तक ऊर्ध्वाधर खम्भे तथा आड़ी शहतीर में किसी न किसी प्रकार के चतुर्भुज का प्रयोग होता है। निर्माण वाले स्थल पर भवन निर्माण करने वाले विकर्ण सहित आयताकार ढांचे का प्रयोग करते हैं ताकि बिल्डिंग को बल दिया जाए क्योंकि विकर्ण आयताकार ढांचे को दृढ़ता देता है।



निर्माण से पूर्व भूमिका या निर्माण स्थल का खाका बनाया जाता है। अधिकतर निर्माण स्थल का खाका चतुर्भुजों का प्रयोग कर बनाया जाता है। उदाहरण के लिये जब हम ताजमहल की बात करते हैं हमारे मस्तिष्क में जो पहली आकृति आती है वह है प्याज रूपी गुम्बद वाले मुख्य मकबरे की। परन्तु ताज के

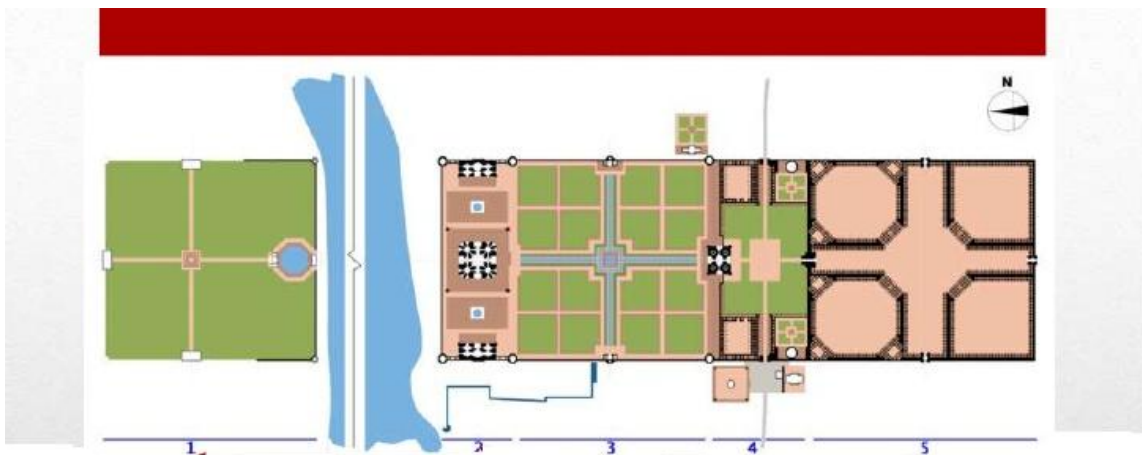
सम्पूर्ण क्षेत्र में सुन्दर सममिति, सामंजस्य के कारण यह संसार का सांतवा अचम्भा कहलाता है। ताज के चित्र (ii, iii, iv ) दर्शाते हैं कि ताज क्षेत्र का सम्पूर्ण 42 एकड़ का भूमि क्षेत्रफल जिस पर ताजमहल बना है, को 5 मुख्य रूप से आयताकार आकृतियों में बांटा गया है।



(i) भूमि योजना



(ii) ताज स्थल का खाका तथा हवाई चित्रण



(iii)

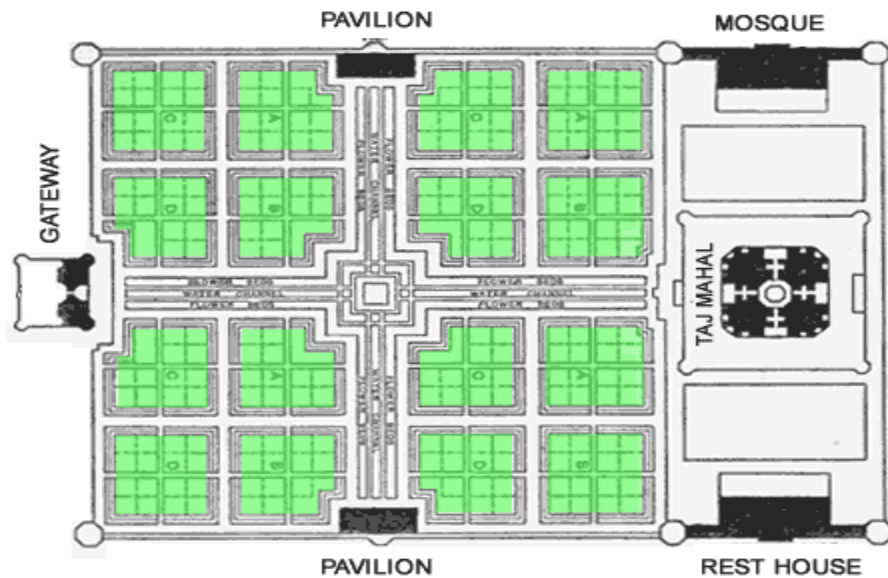
ताजमहल क्षेत्र को मुख्य रूप से 5 भागों में बाँटा जा सकता है

1. यमुना नदी की उत्तर दिशा में चाँदनी बाग।
2. नदी के सम्मुख गुम्बद, मस्जिद तथा जावाब।
3. विभिन्न खण्डों वाला चारबाग वाटिका।
4. गुम्बद के सन्तरियों हेतु जिलाउखाना तथा दो छोटे गुम्बद।
5. ताज गंज मूल रूप से एक बाजार तथा पैदल चलने वालों का स्थान जिस की कुछ यादगारें शेष हैं। मुख्य द्वार जिलाउखाना तथा बाग के मध्य में है।

ताज की सतह धीरे-धीरे ताज गंज से नदी की ओर झुकाव में है।

इस लेख में हम भाग 2 के गुम्बद, मस्जिद, जावाब तथा चार बाग वाले भागों तथा भाग 3 की चारबाग वाटिका को केन्द्रित करेंगे।

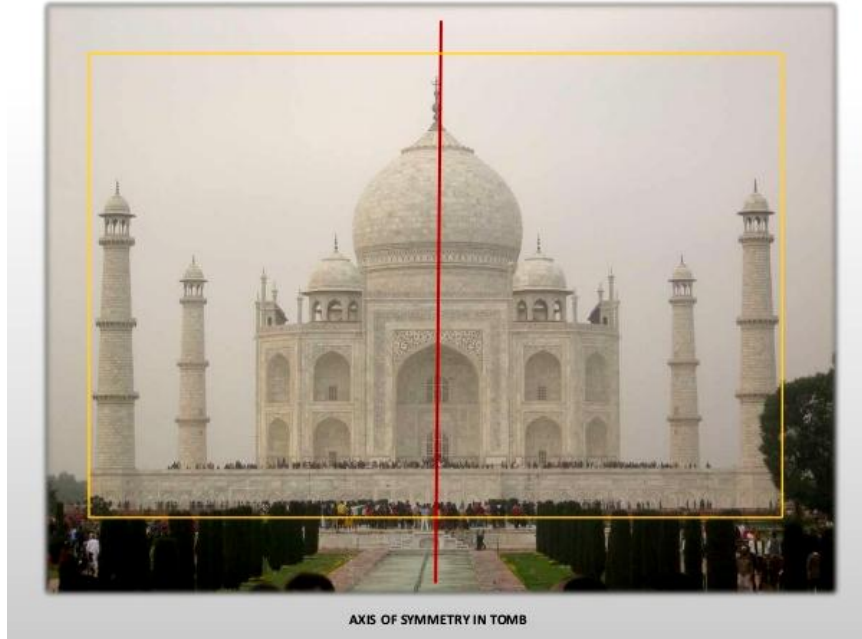
यह स्थान 3 भागों में विभक्त है- मध्य में एक वर्ग जो कि दो एक जैसी आयतों से घिरा है। ताजमहल का मुख्य मकबरा 186 फुट × 186 फुट का वर्गाकार ऊंचे स्थल पर है जिसकी ऊंचाई 22 फुट है। यह स्थान नदी तट से 50 मीटर ऊंचा है तथा इस स्थान को गन्दगी से भरा गया ताकि नदी का पानी इसमें न आ सके। इस वर्गाकार प्लेटफार्म के चारों कोने पर 137 फुट ऊंचाई की चार मीनारें हैं।



(iv)

गुम्बद के ऊपर बना हुआ संगमरमर का डोम, भवन के आधार की 35 मीटर ऊंचाई जितना है। इसकी ऊंचाई को विशेष रूप मिल जाता है क्योंकि यह 7 मीटर ऊंचे बेलनाकार ढोल पर स्थित है। तथा इससे इस भवन के केन्द्र को ठीक प्रकार से निकाला जा सकता है। अपनी आकृति के कारण यह डोम प्याज आकृति डोम कहलाता है। इस डोम के ऊपर एक सोने की पत्ती चढ़ी हुई स्तूपिका स्थिर है जिसकी चोटी भूमि तल से 240 फुट ऊंचाई पर है। तल केन्द्र पर मुख्य कक्ष अष्ट भुज आकृति का है। सममिति को बनाए रखने हेतु चारों मीनारों का आधार भी अष्ट भुज आकृति का है।

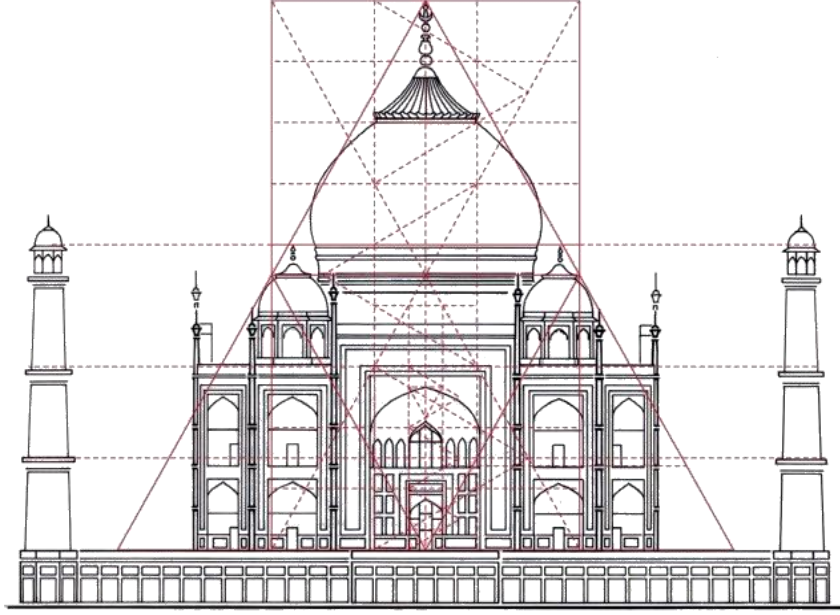
चार बाग़ का क्षेत्रफल 580 मीटर × 300 मीटर है जिसमें बाग़ ही 300 मीटर × 300 मीटर है। इस बाग़ की अपनी पहचान वाली सममिति को बाग़ के किसी भाग से परखा जा सकता है। इस बाग़ में दो समान्तर रास्ते हैं जो कि परस्पर सम दूरी पर काटते हैं। इनके बीच में वर्गाकार भूमि का स्थान है। इसको चार मुख्य भागों को दो पानी की धारायें अलग-2 करती हैं। यह धारायें परस्पर समकोण पर काटती हैं। इन भागों में प्रत्येक भाग को चार समान भागों में रेत, पत्थरों के रास्ते द्वारा बांटा जाता है।



(v)

ताज के रूपांकन में ज्यामिति का सुन्दर प्रयोग देखा जाता है। इससे प्रकट होता है कि 400 वर्ष पूर्व भी ताजमहल के वास्तुकला विशेषज्ञों ने दो तरफा सममिति हेतु ज्यामिति का प्रयोग किया। दो तरफा सममिति का अर्थ है एक ही चित्रण तथा नमूनों का एक साथ युग्म बनाना।

ताज का ज्यामिति ढांचा आयताकार ग्रिड में बांटा जाता है। इस ढांचे को ध्यानपूर्वक समझने पर तथा ज्यामिति द्वारा विश्लेषण ताज की सममिति के प्रति प्रशंसा भाव बनाते हैं।



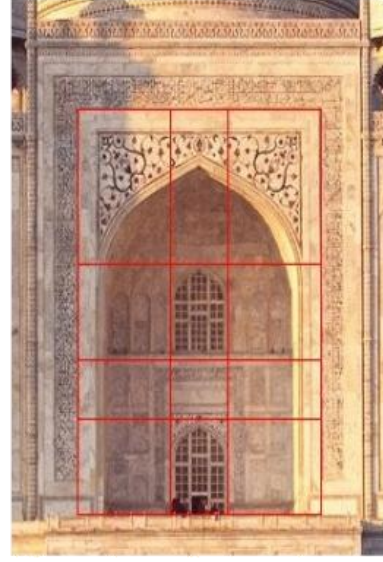
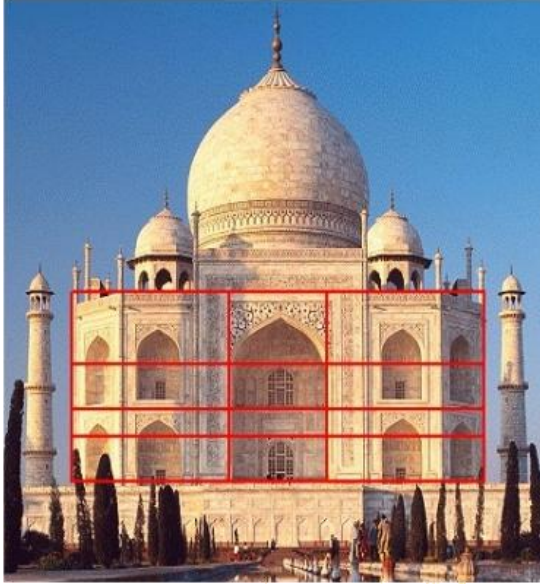
(vi)

उपरोक्त चित्र दर्शाता है कि

- ❑ मकबरा आयताकार भवन है जिसके ऊपर डोम है। डोम की ऊंचाई बिल्डिंग की ऊंचाई के समान है।
- ❑ दोनों ओर की मीनारों पर तीन सर्वांगसम समलम्ब कक्ष है।
- ❑ मकबरे के दोनों ओर के भवनों में एक जैसा रूप हर जगह पर देखा जाता है चाहे वह दीवारे हो खिड़कियाँ हो अथवा मीनारों हो।
- ❑ ताजमहल के रूपांकन में गोल्डन अनुपात संकल्पना का प्रयोग किया गया है।
- ❑ मकबरा के भवन में प्रयोग में आने वाली सभी आयतों तथा इसकी मुख्य चाप सभी गोल्डन आयत में है। इसका अर्थ है कि सभी आयतों की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 0.618 है। इन अनुपात को गोल्डन अनुपात कहते हैं तथा इसको  $\phi$  चिन्ह से दर्शाते हैं।



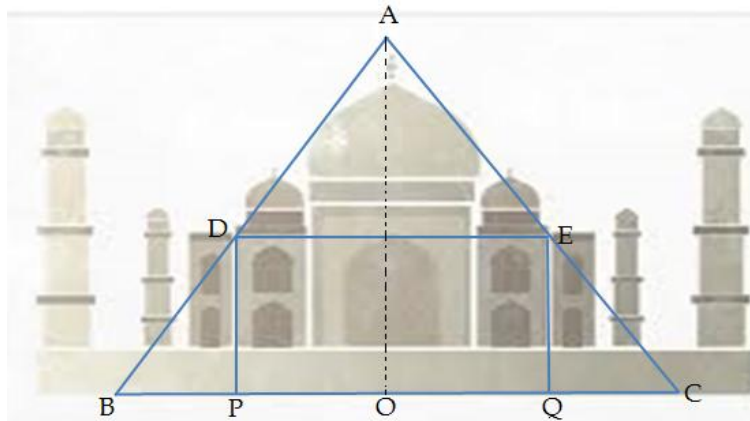
ताजमहल के निर्माण में  $\phi$  का प्रयोग किया गया।



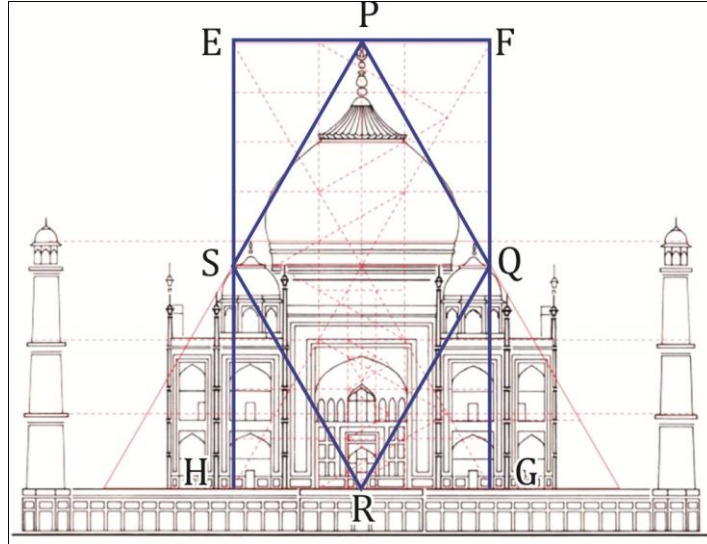
चतुर्भुजों तथा मध्य बिन्दु प्रमेय द्वारा ताज की ज्यामिति सममिति को विभिन्न रूपों से समझाया जा सकता है। कक्षा में चतुर्भुज के प्रश्नों को हल करने में आकृति द्वारा दिखाए गए चतुर्भुज गुणों का प्रयोग सहायक होता है। इस प्रकार ताज की सममिति तथा सुन्दरता में अधिक निखार आता है।

### प्रतिदर्श / नमूना प्रश्न

1.  $\triangle ABC$  की भुजा  $AB$  तथा  $AC$  के मध्य बिन्दु  $D$  तथा  $E$  हैं तथा भुजा  $BC$  पर कोई बिन्दु  $O$  है।  $O$  को  $A$  से मिलाया गया। यदि  $P$  तथा  $Q$  भुजा  $OB$  तथा  $OC$  के मध्य बिन्दु हों तो सिद्ध कीजिए कि  
(a)  $DEQP$  एक समान्तर चतुर्भुज है।  
(b) यदि  $AB = AC$  तो  $DECB$  एक समद्विबाहु समलम्ब है। (4 अंक)



2. चतुर्भुज का कौन सा गुण वास्तुकला विशेषज्ञों को अधिक प्रिय है? (3 अंक)
3. सिद्ध कीजिए कि आयत की संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज एक समचतुर्भुज होता है। नीचे दी गई आकृति में EFGH एक आयत है तथा P, Q, R, S भुजा EF, FG, GH तथा HE के क्रमशः मध्य बिन्दु है। (3 अंक)



### उत्तर

1. (a)  $\Delta ABC$  में, D तथा E भुजा AB तथा AC के मध्य बिन्दु है

$$\Rightarrow 2DE=BC \text{ तथा } DE \parallel BC \text{ (मध्य बिन्दु प्रमेय)..... (i)}$$

$\Delta AOC$  में

E तथा Q क्रमशः भुजा AC तथा OC के मध्य बिन्दु है।

$$\Rightarrow 2EQ=AO \text{ तथा } EQ \parallel AO \text{ (मध्य बिन्दु प्रमेय)..... (ii)}$$

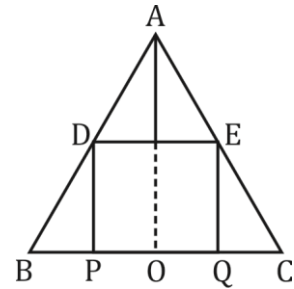
$\Delta AOB$  में

D तथा P क्रमशः भुजा AB तथा OB के मध्य बिन्दु है।

$$\Rightarrow 2DP=AO \text{ तथा } DP \parallel AO \text{ ..... (iii)}$$

$$\text{(ii) तथा (iii) से, } EQ=DP \text{ तथा } EQ \parallel DP \text{ ..... (iv)}$$

(1) तथा (4) से DEQP एक समान्तर चतुर्भुज है।



(b) यदि  $AB = AC$

$$\Rightarrow 2DB = 2EC \quad (\because D \text{ तथा } E \text{ मध्य बिन्दु है})$$

$$\Rightarrow DB = EC$$

$\therefore$  DECB एक समद्विबाहु समलम्ब है।

2. 1. एक चतुर्भुज की चार भुजाएं तथा चार कोण है। भुजाओं तथा कोणों में परिवर्तन कर विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज जैसा कि समलम्ब, समान्तर चतुर्भुज, आयत इत्यादि बनाए जा सकते हैं। इसमें प्रत्येक के अपने गुण हैं।
2. चतुर्भुज द्वारा आकाश का अधिकतम उपयोग किया जा सकता है।
3. आयत का विकर्ण आयत को दो सर्वासम त्रिभुजों में बांटता है। विकर्ण के कारण आयत का ढांचा टूट हो जाता है।

3. EFGH एक आयत है

$\Delta PQF$  तथा  $\Delta RQG$  में

$$\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$$

$$QF = QG \quad (\because Q \text{ भुजा } FG \text{ का मध्य बिन्दु है})$$

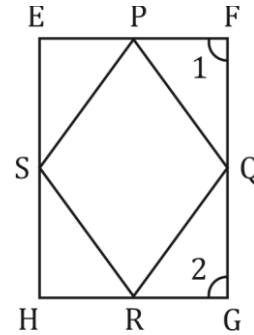
$$PF = RG \quad (\because EF = HG \Rightarrow \frac{EF}{2} = \frac{HG}{2})$$

$$\therefore \Delta PQF \cong \Delta RQG \text{ (SAS)}$$

$$\Rightarrow PQ = QR$$

इसी प्रकार  $PQ = QR = PS = SR$

$\therefore$  PQRS एक समचतुर्भुज है।



0  
T  
B  
A



केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड



शिक्षा केन्द्र, 2, समुदाय भवन, प्रीत विहार, दिल्ली - 110092, भारत  
फोन नं. : 011-22509256-57 • वेबसाइट : [www.cbse.nic.in](http://www.cbse.nic.in)